# MATEMÁTICA FINANCEIRA

**Marcus Quintella, D.Sc.**

**E-mail: marcus.quintella@fgv.br**

**Internet: www.marcusquintella.com.br**

# Juro
# Taxa de Juros
# O Valor do Dinheiro no Tempo
# Diagrama dos Fluxos de Caixa

## JURO

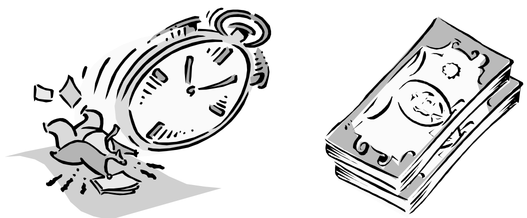
- É a remuneração do capital pelo seu uso alternativo
- Genericamente, todas as formas de remuneração de capital podem ser consideradas como um juro

## TAXA DE JUROS

**É o custo de se tomar dinheiro emprestado e, ao mesmo tempo, é a recompensa por emprestá-lo**

# TAXA DE JUROS

**É a razão entre os juros, recebidos ou pagos, no fim de um período de tempo e o capital inicialmente empregado**



## Cálculos com Taxas de Juros

**QUANDO USAR AS FÓRMULAS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA, SEMPRE DIVIDA A TAXA PERCENTUAL POR 100:**

**3,11% ao mês = 0,0311**

**5,21% ao semestre = 0,0521**

**12,45% ao ano = 0,1245**

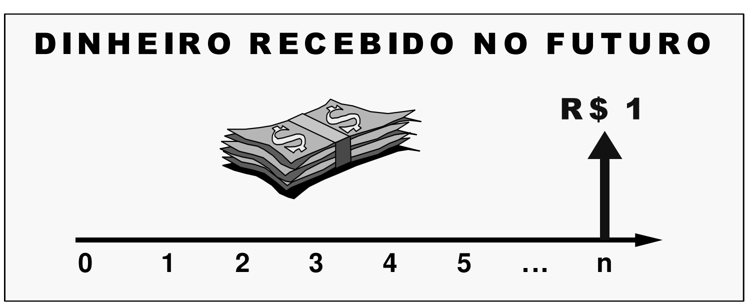
**AVISO IMPORTANTE: Nas máquinas financeiras, as taxas de juros devem ser introduzidas na forma percentual, já que estas fazem a divisão por 100 automaticamente.**

## Formas de Expressão da Taxa de Juros

| TAXA PERCENTUAL | TAXA UNITÁRIA |
|---|---|
| 0,5% | 0,005 |
| 1,0% | 0,01 |
| 2,5% | 0,025 |
| 10% | 0,1 |
| 52,4% | 0,524 |
| 80% | 0,8 |
| 120% | 1,2 |
| 275,1% | 2,751 |
| 1.523,6% | 15,236 |

## O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

**Um REAL hoje vale mais que um REAL amanhã**

**O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO***
**Um REAL hoje vale mais que um REAL amanhã**

**TRÊS MOTIVOS PARA ISSO SER VERDADE:**

**1º) podemos investir o dinheiro que temos hoje para produzir juro e recebermos mais no futuro;**

**2º) o poder do dinheiro muda ao longo do tempo, em virtude da inflação;**

**3º) o recebimento do dinheiro no futuro é incerto, ou seja, existe risco.**

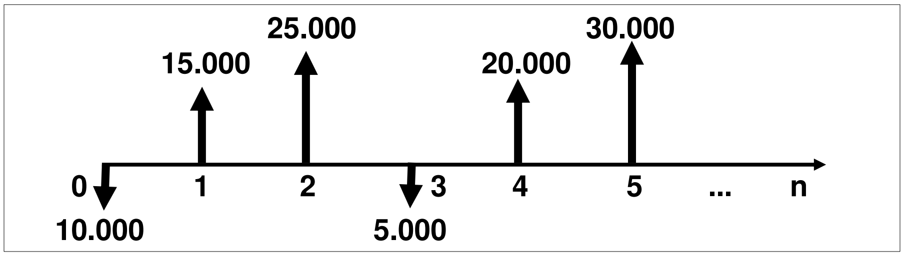
**Esta assertiva vale para qualquer moeda:**

**"Um DÓLAR hoje vale mais que um DÓLAR amanhã"**

**"Um MARCO ALEMÃO hoje vale mais que um MARCO ALEMÃO amanhã"**

# Diagrama dos Fluxos de Caixa

# DIAGRAMA DOS FLUXOS DE CAIXA

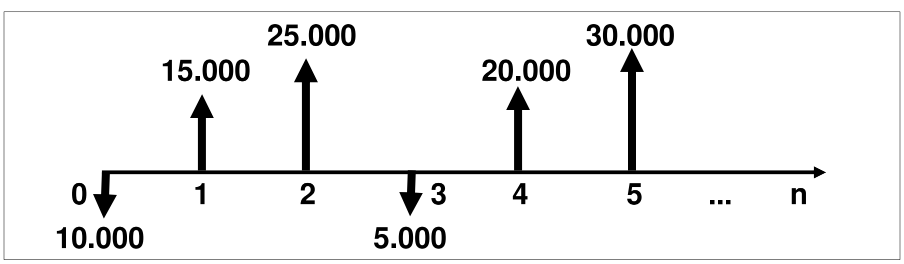



**Representação esquemática das entradas e saídas de capitais numa escala temporal, cujos períodos de tempo podem ser dados em meses, trimestres, semestres e anuais, adotando-se as convenções de capitais resultantes e de final de período (modo *END* das máquinas financeiras)**

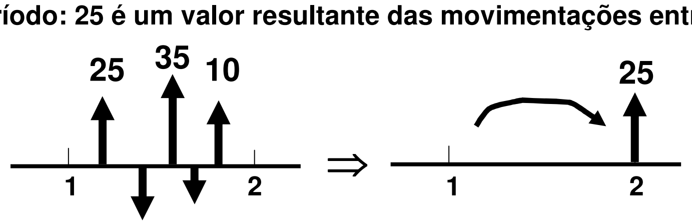
**VETORES PARA CIMA: valores positivos, entradas de caixa receitas, benefícios, reduções de custos etc**

**VETORES PARA BAIXO: valores negativos, saídas de caixa, custos, pagamentos, investimentos etc**

# DIAGRAMA DOS FLUXOS DE CAIXA

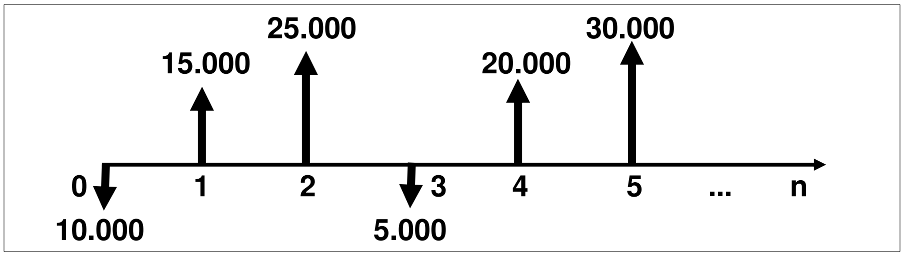



**Convenção de Final de Período para os capitais resultantes de cada período: 25 é um valor resultante das movimentações entre 1 e 2**




**25 está alocado no final do 2º período**

# DIAGRAMA DOS FLUXOS DE CAIXA




| n | Fluxo |
|---|---|
| 0 | - 10.000 |
| 1 | 15.000 |
| 2 | 25.000 |
| 3 | - 5.000 |
| 4 | 20.000 |
| 5 | 30.000 |

# JUROS SIMPLES

# JUROS SIMPLES

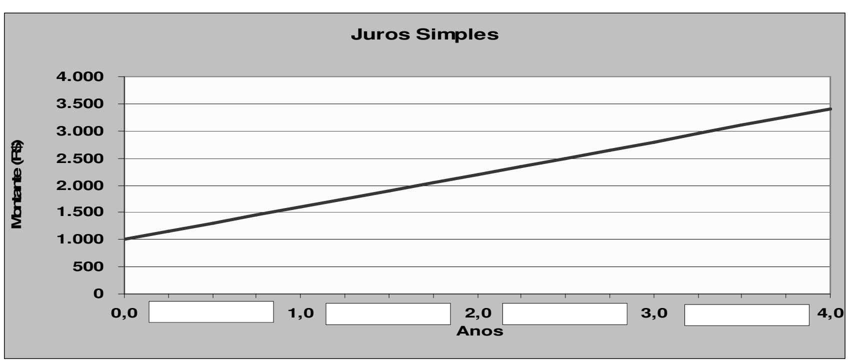
## Somente o capital inicial rende juros

$$J = P \; . \; i \; . \; n$$

**J = Juros no período n;**
**P = Principal - Capital Inicial (C) - Valor Presente (VP) - *Present Value (PV)***
**M = Montante - Valor Futuro (VF) - *Future Value (FV)***
**n = Número de períodos de tempo (meses, anos etc)**
**i = Taxa de juros na forma unitária (na mesma unidade de tempo de n)**

**JUROS SIMPLES: R$1.000, à taxa de 60% a.a., em 4 anos**

| Ano | Saldo Inicial (Principal) | Juros Anuais | Saldo Final (Montante) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | J = 1.000 x 0,6 = 600 | 1.600 |
| 2 | 1.600 | J = 1.000 x 0,6 = 600 | 2.200 |
| 3 | 2.200 | J = 1.000 x 0,6 = 600 | 2.800 |
| 4 | 2.800 | J = 1.000 x 0,6 = 600 | 3.400 |



Dependendo da convenção utilizada, o cálculo dos juros podem produzir diferentes resultados:

- **JUROS EXATOS**: tanto a contagem do prazo da aplicação quanto a conversão da taxa de juros são realizadas pelo critério do ano civil;

  Ex: ano = 365 ou 366 dias; mês = 28, 29, 30 ou 31 dias.

- **JUROS COMERCIAIS**: Ambas são realizadas pelo critério do ano comercial;

  Ex: ano = 360 dias; mês = 30 dias.

- **JUROS BANCÁRIOS**: o prazo é contado pelo critério do ano civil e a conversão pelo critério do ano comercial.

  Ex: n = 6 dias; i = 32 % a.m. → $J = P \cdot i \cdot n$

  $J = P \cdot 0{,}32 \cdot (6 / 30)$ → $J = 0{,}064 \cdot P$

No Brasil, o sistema utilizado é o dos Juros Bancários.

# JUROS SIMPLES

$$J = P \cdot i \cdot n \quad \rightarrow \quad P = \frac{J}{i \cdot n} \qquad i = \frac{J}{P \cdot n} \qquad n = \frac{J}{P \cdot i}$$

$$\downarrow$$

$$M = P + J \quad \longrightarrow \quad M = P\,(1 + i \cdot n)$$

**Juros Simples: Exemplo Ilustrativo**

**Uma pessoa tomou emprestado R$50.000, por 48 dias, a uma taxa de juros de 30% ao ano. Sabendo-se que o banco adotará o regime de juros simples, calcule os juros e montante a ser pago para quitar o empréstimo em questão.**

$$J = P \cdot i \cdot n$$

$$i = 30\% = 0{,}30$$

$$n = 48 \text{ dias} = 48 / 360 \text{ anos}$$

$$J = 50.000 \times 0{,}30 \times 48 / 360 = 2.000$$

$$J = 2.000$$

$$M = P + J$$

$$M = 50.000 + 2.000 = 52.000$$

$$M = 52.000$$

# JUROS COMPOSTOS

# JUROS COMPOSTOS

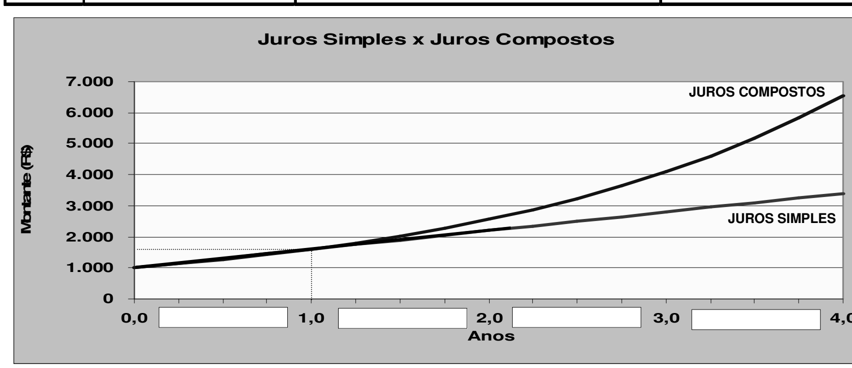
**O montante de um período é o principal do próximo período: “juros sobre juros”**

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

**P = Principal - Capital Inicial (C) - Valor Presente (VP) - *Present Value (PV)***
**M = Montante - Valor Futuro (VF) - *Future Value (FV)***
**n = Número de períodos de tempo (meses, anos etc)**
**i = Taxa de juros na forma unitária (na mesma unidade de tempo de n)**

**JUROS COMPOSTOS: R$1.000, à taxa de 60% a.a., em 4 anos**

| Ano | Saldo Inicial (Principal) | Juro Anual | Saldo Final (Montante) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | J = 1.000 x 0,6 = 600 | 1.600 |
| 2 | 1.600 | J = 1.600 x 0,6 = 960 | 2.560 |
| 3 | 2.560 | J = 2.560 x 0,6 = 1.536 | 4.096 |
| 4 | 4.096 | J = 4.096 x 0,6 = 2.458 | 6.554 |



# JUROS COMPOSTOS

$$J = P \,.\, [(1 + i)^n + 1]$$

↓

$$M = P + J$$

↓

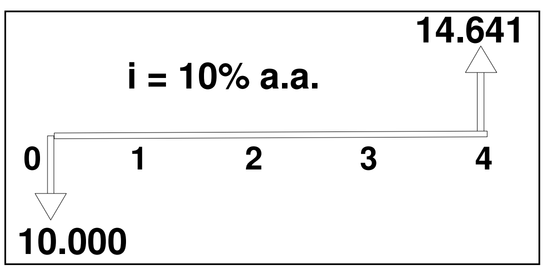
$$M = P \,.\, (1 + i)^n$$

$$P = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$i = \left(\frac{M}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$n = \frac{\text{Log}\,(M/P)}{\text{Log}(1 + i)}$$

# EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS




| n | Principal | Juros | Montante |
|---|---|---|---|
| 0 | 10.000 | - | - |
| 1 | 11.000 | 1.000 | |
| 2 | 12.100 | 1.100 | |
| 3 | 13.310 | 1.210 | |
| 4 | | 1.331 | 14.641 |

## JUROS COMPOSTOS

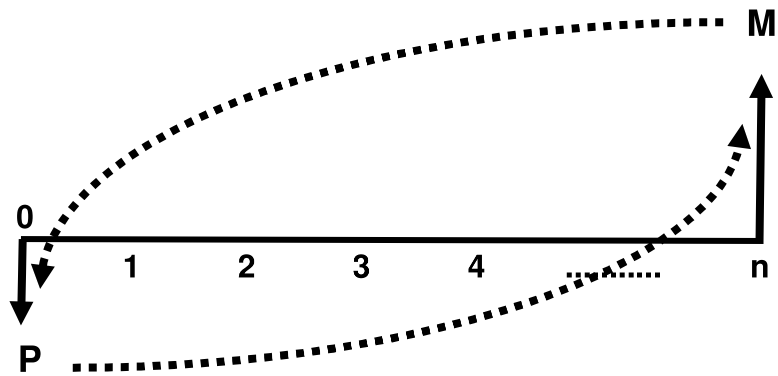
$$M = P \,.\, (1 + i)^n$$

$$M = 10.000 \,.\, (1 + 0{,}10)^4$$

$$M = 14.641$$

## EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS

**Para achar P, divida M pelo Fator $(1 + i)^n$**

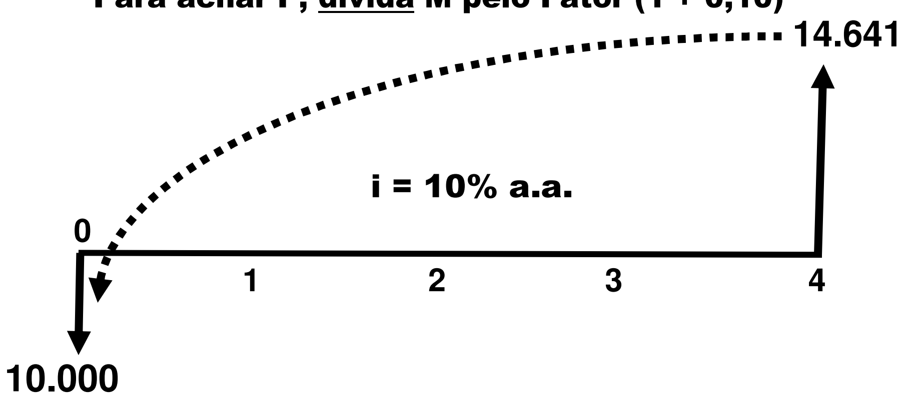



**Para achar M, multiplique P pelo Fator $(1 + i)^n$**

$$M = P \,.\, (1 + i)^n$$

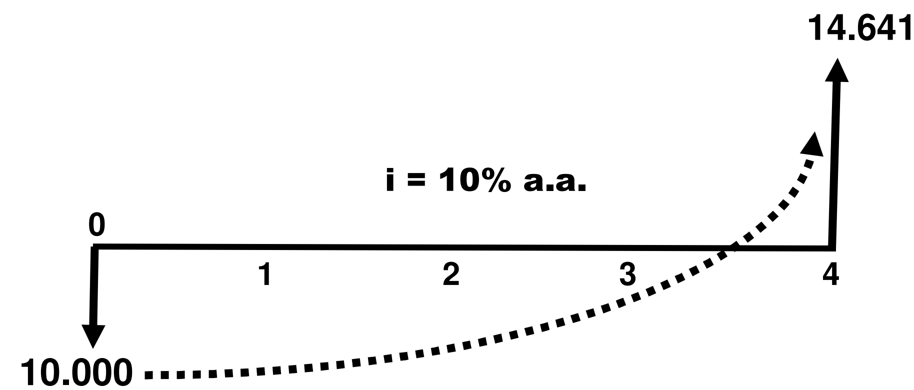
## EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS

**Para achar P, divida M pelo Fator $(1 + 0{,}10)^4$**




$$M = P \,.\, (1 + i)^n$$

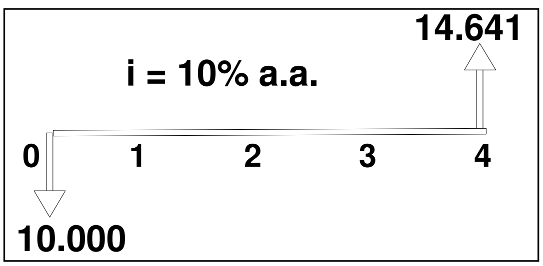
## EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS




**Para achar M, <u>multiplique</u> P pelo Fator $(1 + 0,10)^4$**

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

## EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS




**ACUMULAÇÃO DE CAPITAL**

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

$M = 10.000 \cdot (1 + 0,10)^4$

$M = 14.641$

**VALOR PRESENTE**

$$P = M \cdot \left[ \frac{1}{(1 + i)^n} \right]$$

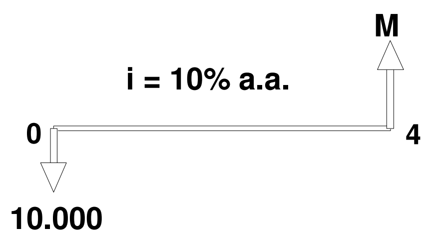
$P = 14.641 / (1 + 0,10)^4$

$P = 10.000$

# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

| Número de Períodos n | Taxa de Juros i em % | Valor Presente ou Principal P | Valor Futuro ou Montante M |
|---|---|---|---|


### Equivalência de Capitais: Exemplo Ilustrativo




$$M = P\ .\ (1 + i)^n$$

$$M = 10.000\ .\ (1 + 0{,}10)^4$$

$$M = 14.641$$

f [FIN x⋛y x≤y]

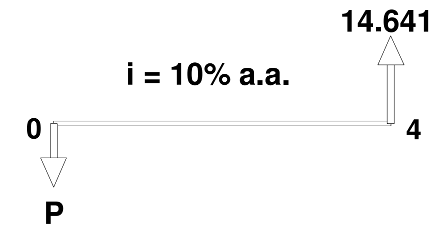
10.000 [CHS DATE] [NPV PV CF₀]

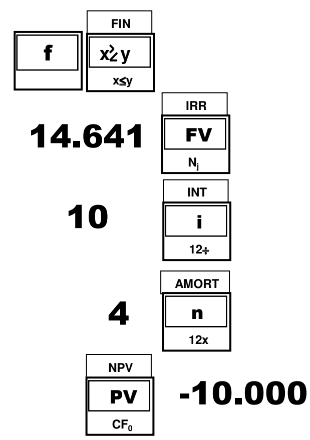
10 [INT i 12÷]

4 [AMORT n 12x]

[IRR FV Nj] 14.641

## Equivalência de Capitais: Exemplo Ilustrativo



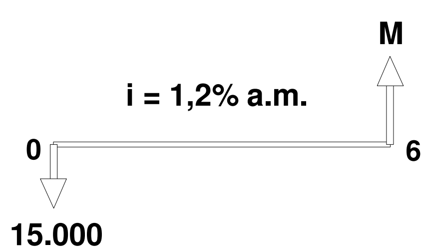

$$M = P \,.\, (1 + i)^n$$

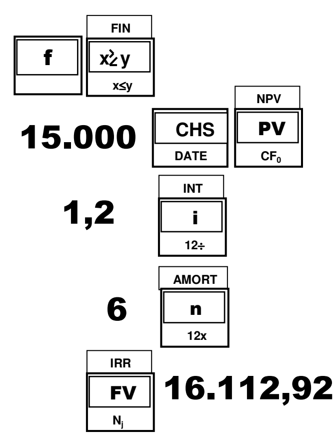
$$P = 14.641 \,/\, (1 + 0{,}10)^4$$

$$P = 10.000$$

## Equivalência de Capitais: Exemplo Ilustrativo

**Caso uma pessoa aplique R$15.000,00, a uma taxa de 1,2% ao mês, por 6 meses, qual será o valor a ser resgatado no final do período da aplicação?**




$$M = P \,.\, (1 + i)^n$$

$$M = 15.000 \,.\, (1 + 0{,}012)^6$$

$$M = 16.112,92$$

**<u>NOTAS IMPORTANTES</u>:**

**Em problemas acadêmicos, existe uma convenção tácita para identificarmos quando um problema deve ser resolvido usando-se juros compostos: NADA É DITO.**

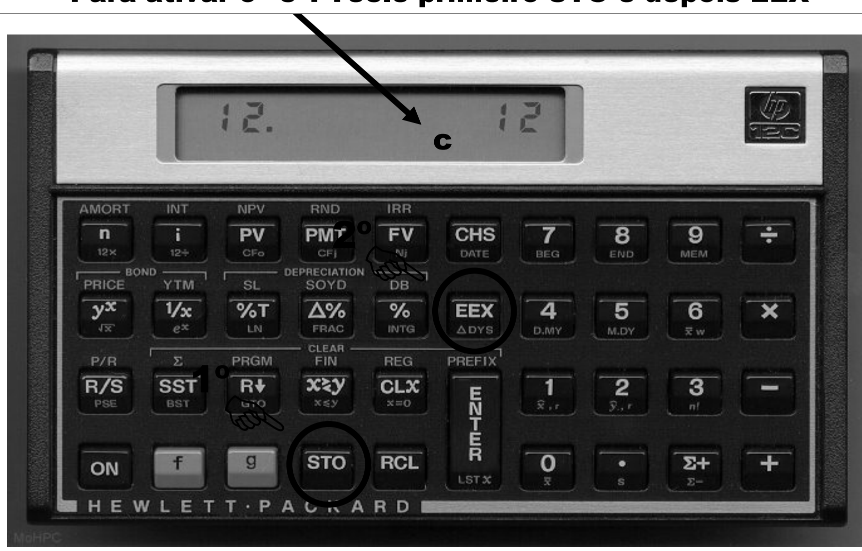
**Desta forma, as resoluções de problemas por juros simples devem ter a indicação “a juros simples”.**

**Na prática do mercado financeiro, nem sempre a forma de capitalização dos juros é identificada claramente. Na verdade, as operações ou produtos financeiros possuem suas próprias características, que devem ser identificadas pelos tomadores ou investidores.**

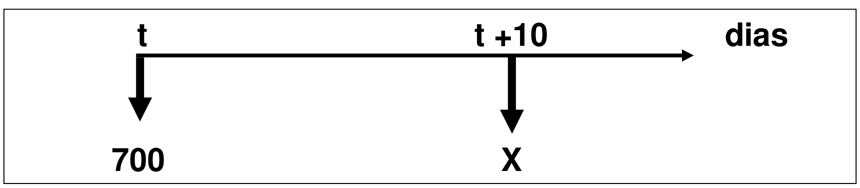
# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

**Para operações, a juros compostos, com períodos fracionários, ou seja n < 1, mantenha a letra “c” no visor.**

**Para ativar o “c”: Tecle primeiro STO e depois EEX**



Um cliente comprou, em prestações mensais e iguais de R$ 700,00, um determinado eletrodoméstico na Loja ABC. Sabe-se que a loja cobra juros de mora, no caso de atraso no pagamento das prestações, de 15% ao mês. Calcule os valores totais a serem pagos pelo cliente, para atrasos de 10, 40 e 132 dias.



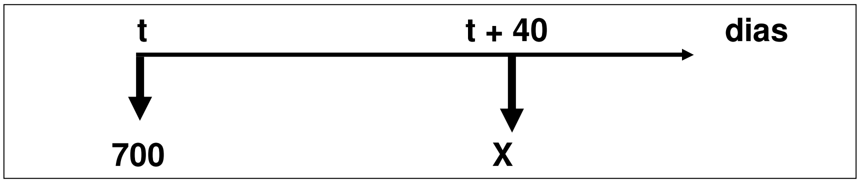

(a) Juros Simples: $J = P . i . n$

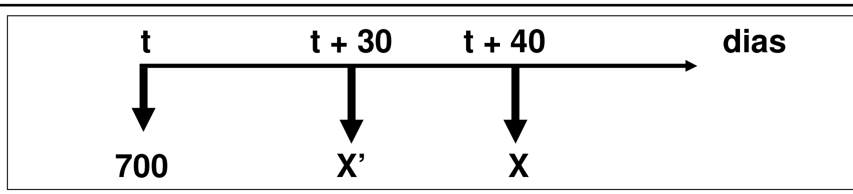
$J = 700 . 0,15 . (10/30) = 35$

$X = 700 + 35 \therefore X = 735$

(b) Juros Compostos: $M = P . (1 + i)^n$

$X = 700 . (1,15)^{10/30} \therefore X = 733,38$




**(a) Juros Simples (prazo frac.): $J = P.\ i\ .\ n$**

**$X' = 700\ .\ (1 + 0{,}15)^{1} = 805$ (15% ao mês)**

**$J = 805\ .\ 0{,}15\ .\ (10/30) = 40{,}25$**

**$X = 805 + 40{,}25 \ \therefore\ X = 845{,}25$**

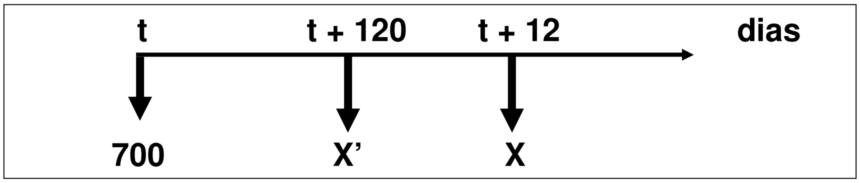
**(b) Juros Simples (prazo total): $J = P.\ i\ .\ n$**

**$J = 700\ .\ 0{,}15\ .\ (40/30) = 140$**

**$X = 700 + 140 \ \therefore\ X = 840$**

**(c) Juros Compostos: $M = P\ .\ (1 + i)^{n}$**

**$X = 700\ .\ (1{,}15)^{40/30} \ \therefore\ X = 843{,}39$**




(a) Juros Simples (prazo frac.): $J = P.\ i\ .\ n$

$X' = 700\ .\ (1 + 0{,}15)^4 = 1.224{,}30$ (15% ao mês)

$J = 1.224{,}30\ .\ 0{,}15\ .\ (12/30) = 73{,}46$

$X = 1.224{,}30 + 73{,}46 \quad \therefore \quad X = 1.297{,}76$

(b) Juros Simples (prazo total): $J = P.\ i\ .\ n$

$J = 700\ .\ 0{,}15\ .\ (132/30) = 462{,}00$

$X = 700 + 462 \quad \therefore \quad X = 1.162{,}00$

(c) Juros Compostos: $M = P\ .\ (1 + i)^n$

$X = 700\ .\ (1{,}15)^{132/30} \quad \therefore \quad X = 1.294{,}70$

## JUROS DE MORA

- **Principal: R$1.000;**
- **Taxa do empréstimo: 6,79% ao mês;**
- **Prazo do empréstimo: 1 mês;**
- **Montante para o pagamento em dia:**
  **M = R$1.000 × 1,0679 = R$1.067,90**

- **Atraso no pagamento: 15 dias;**
- **Taxa de juros de mora: 16% ao mês;**
- **Juros de mora pelo atraso:**
  **J = R$1.067,90 × 0,16 × (15/30) = R$85,43**

- **Total a ser pago, com juros de mora:**
  **T = R$1.153,33**

**JUROS DE MORA + MULTA**

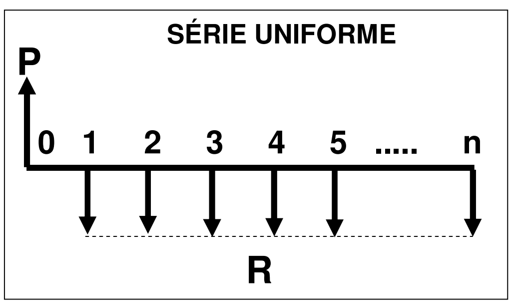
- **Principal: R$5.000;**
- **Taxa do empréstimo: 5,11% ao mês;**
- **Prazo do empréstimo: 3 meses;**
- **Montante para o pagamento em dia:**
  **M = R$5.000 $\times$ $(1{,}0511)^3$ = R$5.806,34**

- **Atraso no pagamento: 18 dias;**
- **Taxa de juros de mora: 10% ao mês;**
- **Juros de mora pelo atraso:**
  **J = R$5.806,34 $\times$ 0,10 $\times$ (18/30) = R$348,38**
- **Multa pelo atraso do pagamento: 2%**
  **Multa = 0,02 $\times$ R$5.806,34 = R$116,13**

- **Total a ser pago, com juros de mora e multa:**
  **Total = R$6.270,85**

# SÉRIES UNIFORMES

**(de pagamentos ou de recebimentos)**




**P = Principal - Capital Inicial (C) - Valor Presente (VP) – *Present Value (PV)***
**M = Montante - Valor Futuro (VF) - *Future Value (FV)***
**R = Valor periódico uniforme (anuidade, semestralidade, mensalidade etc), cada uma das parcelas iguais e sucessivas de uma série uniforme – *Payment (PMT)***
**n = Número de períodos de tempo (meses, anos etc)**
**i = Taxa de juros na forma unitária (na mesma unidade de tempo de n)**

# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

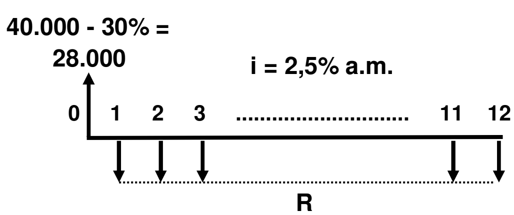
**Parcela Uniforme de uma Série Uniforme R**

**Modo BEGIN para as Séries Uniformes Antecipadas**


---

**Série Uniforme Postecipada: Exemplo Ilustrativo**

**Um automóvel está sendo vendido por R$40.000, à vista, ou com 30% de entrada e 12 parcelas mensais e iguais. Calcule o valor de cada prestação mensal, sabendo-se que a taxa de juros praticada pelo banco da concessionária é de 2,5% a.m.**




f FIN x≷y

28.000 PV

12 n

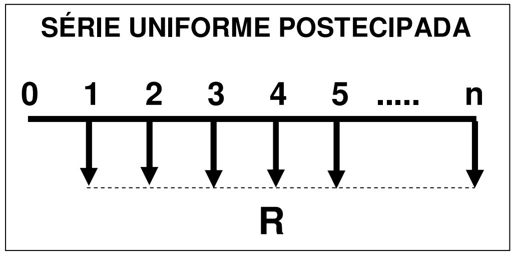
2,5 i

PMT -2.729,64

## Entrada de R$12.000 e 12 prestações de R$2.729,64

# SÉRIES UNIFORMES

**(de pagamentos ou de recebimentos)**




**P = Principal - Capital Inicial (C) - Valor Presente (VP) – *Present Value (PV)***

**M = Montante - Valor Futuro (VF) - *Future Value (FV)***

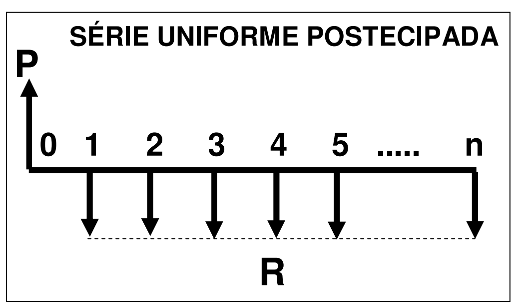
**R = Valor periódico uniforme (anuidade, semestralidade, mensalidade etc), cada uma das parcelas iguais e sucessivas de uma série uniforme – *Payment (PMT)***

**n = Número de períodos de tempo (meses, anos etc)**

**i = Taxa de juros na forma unitária (na mesma unidade de tempo de n)**

# SÉRIES UNIFORMES

**(de pagamentos ou de recebimentos)**




$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

$$P = R / (1+i)^1 + R / (1+i)^2 + \dots + R / (1+i)^n$$

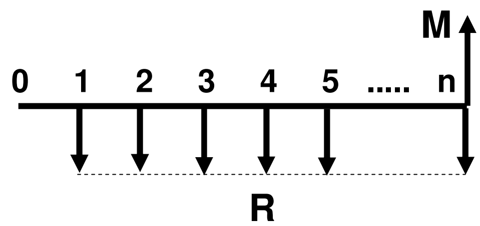
**Progressão Geométrica de Razão = (1+i)**

$$P = R \cdot \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n} \right] \qquad R = P \cdot \left[ \frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

# SÉRIES UNIFORMES

**(de pagamentos ou de recebimentos)**

**SÉRIE UNIFORME POSTECIPADA**




$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

$$M = R.(1+i)^{n-1} + R.(1+i)^{n-2} + ... + R.(1+i)^{n-n}$$

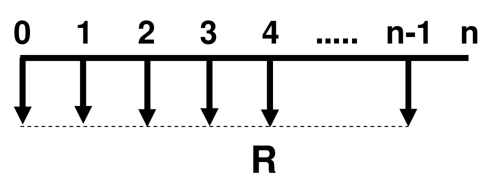
**Progressão Geométrica de Razão = 1 / (1+i)**

$$M = R \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \qquad R = M \cdot \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

# SÉRIES UNIFORMES

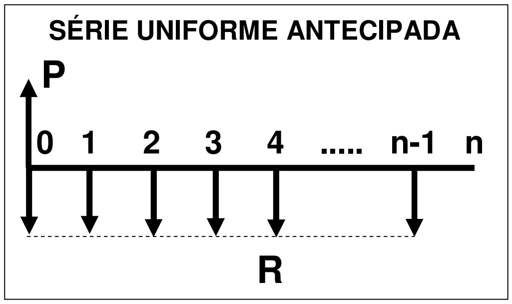
**(de pagamentos ou de recebimentos)**

**SÉRIE UNIFORME ANTECIPADA**




**<u>AVISO IMPORTANTE</u>: Uma série antecipada não subtrai uma parcela em relação à mesma série postecipada, ou seja, o número de períodos n é o mesmo em ambas as séries, apenas há a antecipação de um período de cada parcela.**

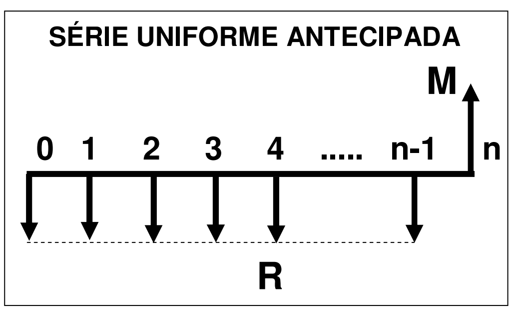
## SÉRIES UNIFORMES
**(de pagamentos ou de recebimentos)**




$$P = R \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \right] \cdot (1+i)$$

$$R = P \cdot \left[ \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] / (1+i)$$

## SÉRIES UNIFORMES
**(de pagamentos ou de recebimentos)**




$$M = R \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \cdot (1+i)$$

$$R = M \cdot \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] / (1+i)$$

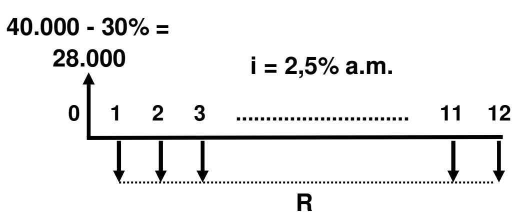
# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

**Parcela Uniforme de uma Série Uniforme R**

**Modo BEGIN para as Séries Uniformes Antecipadas**


**Série Uniforme Postecipada: Exemplo Ilustrativo**

**Um automóvel está sendo vendido por R\$40.000, à vista, ou com 30% de entrada e 12 parcelas mensais e iguais. Calcule o valor de cada prestação mensal, sabendo-se que a taxa de juros praticada pelo banco da concessionária é de 2,5% a.m.**




$$R = P \cdot \left[\frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

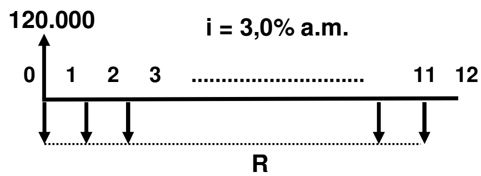
**R = 28.000 . [0,025.(1,025)$^{12}$ ] / [(1,025)$^{12}$ -1]**

**R = 2.729,64**

| | |
|---|---|
| | **f** FIN $x \gtrless y$ $x \leq y$ |
| **28.000** | NPV **PV** $CF_0$ |
| **12** | AMORT **n** 12x |
| **2,5** | INT **i** 12÷ |
| **-2.729,64** | RND **PMT** $CF_0$ |

## Série Uniforme Antecipada: Exemplo Ilustrativo

**Um caminhão está sendo vendido por R$120.000, à vista, ou financiado em 12 parcelas mensais e iguais, vencendo a primeira no ato da compra. Calcule o valor de cada prestação mensal, sabendo-se que a taxa de juros praticada pela financeira é de 3% a.m.**




$$R = P \,.\, \left[\frac{i\,.\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \;/\; (1+i)^n$$

**R = 120.000 . [0,03.(1,03)$^{12}$ /(1,03)$^{12}$ -1] / 1,03**

**R = 11.704,32**

g | 7 (BEG)

f | FIN ($x \gtrless y$ / $x \leq y$)

**120.000** PV (NPV / $CF_0$)

**12** n (AMORT / 12x)

**3** i (INT / 12÷)

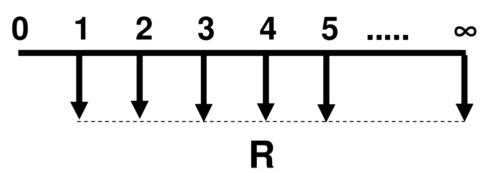
PMT (RND / $CF_0$) **-11.704,32**

g | 8 (END)

# SÉRIES UNIFORMES

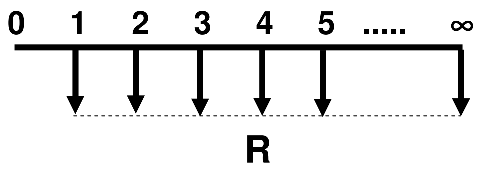
**(de pagamentos ou de recebimentos)**

**SÉRIE UNIFORME PERPÉTUA**




**<u>AVISO IMPORTANTE</u>: As série perpétuas, também chamadas de perpetuidades, geralmente são postecipadas e o número de períodos n tende a infinito.**

**SÉRIE UNIFORME PERPÉTUA**




$$P = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}\right]$$

**PERPETUIDADE: $n \rightarrow \infty$**

$$P = \lim_{n\to\infty} R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}\right]$$

$$P = R \cdot \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{(1+i)^n}{i \cdot (1+i)^n} - \frac{1}{i \cdot (1+i)^n}\right\}$$

$$P = R \cdot \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{i} - 0\right\}$$

$$P = \frac{R}{i}$$

**Avaliação de Ativos: Exemplo Ilustrativo**

**Imagine que você seja um investidor do mercado financeiro e pretende investir nas ações da Columbia S.A., cuja cotação atual na bolsa é de R$ 17,43 por ação.**

**Os relatórios da empresa estimam uma distribuição de dividendos, em forma de perpetuidade, em torno de R$ 2,11 por ação, sem expectativas de crescimento.**

**Determine o preço justo desta ação, para uma taxa de retorno exigida de 15% ao ano, e avalie sua atratividade.**

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | ........ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Investimento | -17,43 | | | | | |
| Fluxo de Dividendos | | 2,11 | 2,11 | 2,11 | | 2,11 |
| Fluxo de Caixa Previsto | -17,43 | 2,11 | 2,11 | 2,11 | ....... | 2,11 |

**Taxa de retorno exigida pelo investidor = 15% a.a.**

**Preço justo: $P_0 = 2{,}11 / 0{,}15 = 14{,}07$**

**Como $P_0 = 14{,}07 < P_m = 17{,}43$, recomenda-se a venda da ação.**

**Avaliação de Ativos: Exemplo Ilustrativo**

**Imagine que você seja um investidor do mercado imobiliário e pretende comprar um apartamento de três quartos em Copacabana, no Rio de Janeiro, para fins de investimento. Uma pesquisa de mercado revelou que o valor do imóvel pretendido gira em torno de R$400.000, sem expectativas de valorização para o futuro, e o aluguel médio para a região do apartamento em questão é de R$1.800,00 mensais (R$21.600,00, anuais). Estime o valor teórico do imóvel em questão, para fins de investimento, a partir de uma taxa de retorno exigida de 1,5% ao mês (19,56% ao ano).**

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | ...... | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Investimento | - 400,0 | | | | | |
| Fluxo de Aluguéis | | 21,6 | 21,6 | 21,6 | ...... | 21,6 |
| Fluxo de Caixa Previsto | - 400,0 | 21,6 | 21,6 | 21,6 | …... | 21,6 |

**Taxa de retorno exigida pelo investidor = 19,56% a.a.**

**Preço teórico: $P_0$ = 21,6 / 0,1956 = 110.429**

**Como $P_0$ = 110.429 < $P_m$ = 400.000,**
**a compra do imóvel não é recomendada**

**Pagamento à Vista ou a Prazo? Exemplo Ilustrativo**

**Uma empresa está oferecendo um equipamento por R$120.000, faturado em 30 dias, ou à vista, com um desconto de 2,5% sobre o preço anunciado. Qual a melhor opção para o comprador, caso tenha uma taxa de juros de 1,2% a.m. disponível para aplicação de seu capital.**

**Á VISTA = R$120.000 – 2,5% = R$117.000**

**A PRAZO = R$120.000, em 30 dias**

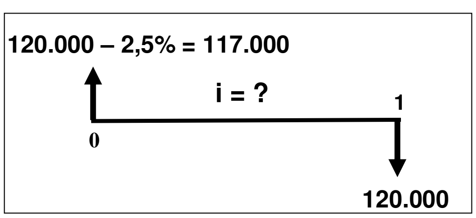
**Caso o comprador possua o capital para a compra à vista, ele poderá verificar a melhor opção para o seu capital.**

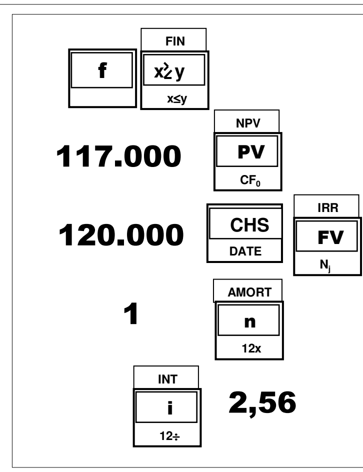
**Se, em vez de comprar à vista, o comprador optar pela aplicação, à taxa de 1,2% a.m., o seu capital renderá, em 30 dias, o seguinte montante:**

**FV = R$117.000 × (1,012) = R$118.404**

**Portanto, não será vantajosa a compra faturada em 30 dias, visto que a aplicação não será suficiente para cobrir a dívida de R$120.000. Desta forma, o comprador deve aceitar o desconto para pagamento à vista.**

**FV = PV . (1 + i)$^n$**




**i = 2,56% > Taxa Alternativa = 1,2% ⇒ À VISTA**

# REGRA GERAL PARA ACEITAÇÃO DE DESCONTOS

**i > Taxa Alternativa $\Rightarrow$ À VISTA**

**i < Taxa Alternativa $\Rightarrow$ A PRAZO**

**i = taxa calculda para o fluxo de caixa do parcelamento**
**Taxa Alternativa = taxa disponível no mercado para a aplicação do capital**

**Desconto para Pagamento: Exemplo Ilustrativo**

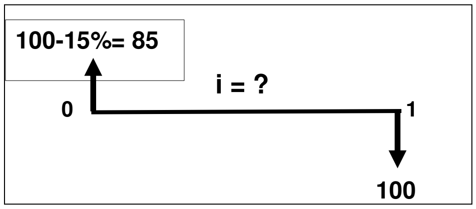
**O quadro abaixo apresenta os casos em que o consumidor deve optar pelo desconto para pagamento à vista ou pela compra por cartões de crédito. Confira os cálculos, sabendo-se que a remuneração da poupança na época estava em torno de 25% a.m.**

**Como deve ser o pagamento**

| Desconto à vista | Taxa de juros | Alternativa |
|---|---|---|
| 10% | 11,11% | cartão ou pré-datado |
| 15% | 17,65% | cartão ou pré-datado |
| 20% | 25,00% | cartão ou à vista |
| 25% | 33,33% | à vista |
| 30% | 42,86% | à vista |
| 35% | 53,85% | à vista |
| 40% | 66,67% | à vista |

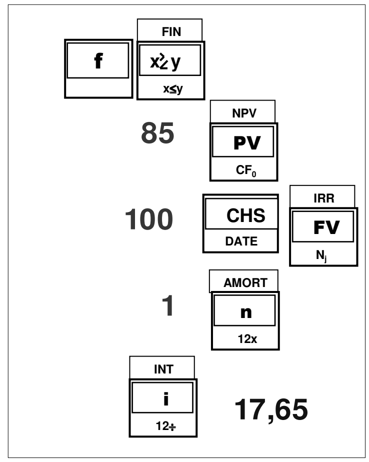
Fonte: Jornal do Brasil (07/09/92)

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$



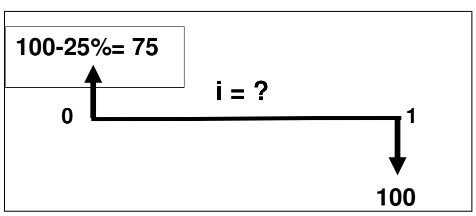

$$100 = 85 \cdot (1 + i)$$

$$i = (100 / 85) - 1 = 0{,}1765 \therefore i = 17{,}65\ \%$$



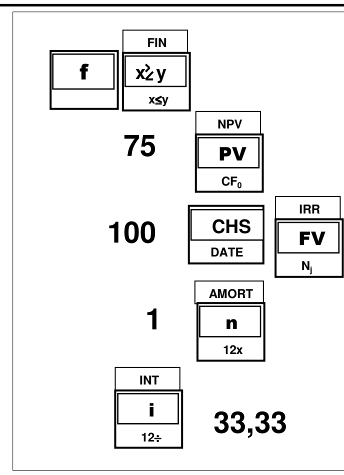

**$i = 17{,}65\% < TA = 25\%$ ⇒ A PRAZO**

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$



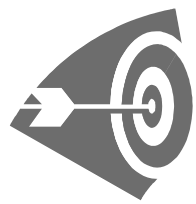

$$100 = 75 \cdot (1 + i)$$

$$i = (100 / 75) - 1 = 0{,}3333 \therefore i = 33{,}33\ \%$$




**$i = 33{,}33\% > TA = 25\%$ ⇒ À VISTA**

# TAXAS DE JUROS NOMINAIS E EFETIVAS



**TAXAS NOMINAIS**

**Período de Capitalização ≠ Período Base**

**Ex: 6 % a.a. c/ capitalização mensal**
**18 % a.a. c/ capitalização trimestral**

**TAXAS EFETIVAS**

**Período de Capitalização = Período Base**

**Ex: 2 % a.m. c/ capitalização mensal**
**12 % a.a. c/ capitalização anual**

**Taxas Nominal e Efetiva: Exemplo Ilustrativo**

**A PARTIR DO EXEMPLO DAS CADERNETAS DE POUPANÇAS BRASILEIRA, OS CONCEITOS DAS TAXAS NOMINAIS E EFETIVAS SERÃO APRESENTADOS**

**Como as cadernetas de poupança brasileiras oferecem juros reais de 6% ao ano, com capitalização mensal dos juros, calcule as taxas reais efetivas, mensal e anual, de um capital, para um período de um ano de aplicação.**

**i = 6 % a.a. com capitalização mensal**

**TAXA NOMINAL DE JUROS**

**BASE ≠ PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO**

**Transformar na taxa efetiva relativa ao período de capitalização:**

**i = 6% / 12 = 0,5% a.m.**

**Calcular a taxa efetiva, relativa ao período da base da taxa nominal, pelo conceito de juros compostos:** $M = P.(1+i)^n$

$$M = P \,.\, (1 + 0{,}005)^{12} \quad \therefore \quad M = 1{,}0616778 \,.\, P$$

$$i_{efetiva} = 1{,}0616778 - 1 = 0{,}0616778 \Rightarrow 6{,}16778\% \text{ a.a.}$$

**Uma taxa de 6% a.a., com capitalização mensal, corresponde a uma taxa efetiva de 6,16778% a.a.**

**TAXA REAL DA POUPANÇA$\Rightarrow$0,5% a.m.$\Leftrightarrow$6,16778% a.a.**

**Comprovação Matemática das Taxas Equivalentes**

**Se aplicarmos R$ 15.000,00 na poupança por 3 anos, utilizando quaisquer das taxas acima, o montante acumulado, em termos reais, será dado por: $M = P\,(1 + i)^n$**

**Para i = 0,5% a.m. $\Rightarrow M = 15.000\,(1 + 0,005)^{36} \therefore$ M =17.950,21**

**Para i = 6,16778% a.a.$\Rightarrow M = 15.000\,(1 + 0,0616778)^3$**

**M = 17.950,21**

**Conclusão:**

**0,5% a.m. e 6,16778% a.a.**

**são TAXAS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS**

**NOTAS IMPORTANTES:**

**Em problemas acadêmicos, existe uma outra convenção tácita para identificarmos quando uma taxa de juros é nominal ou efetiva: quando a taxa for nominal, deverá ser citado o período de capitalização diferente da base da taxa; por outro lado, quando a capitalização não for citada, subentende-se que a taxa é efetiva.**

**Na prática do mercado financeiro, nem sempre o tipo de taxa de juros é identificado claramente. Na verdade, as operações ou produtos financeiros possuem suas próprias características, que devem ser identificadas pelos tomadores ou investidores.**

**EM FINANÇAS, DEVE-SE TRABALHAR SOMENTE COM TAXAS DE JUROS EFETIVAS**

# TAXAS DE JUROS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS

TAXAS EQUIVALENTES
A JUROS COMPOSTOS

DUAS OU MAIS TAXAS SÃO EQUIVALENTES QUANDO PRODUZEM O MESMO MONTANTE AO FINAL DO MESMO PERÍODO

**NOTAS IMPORTANTES:**

**Lembre-se que, em matemática financeira, a taxa de juros "i" e o número de períodos "n" devem estar sempre na mesma unidade de tempo.**

**Desta forma, na fórmula $M = P \cdot (1 + i)^n$, prefira sempre converter o número de períodos "n" para a mesma unidade de tempo da taxa de juros.**

**Trata-se de um procedimento matematicamente mais fácil e como menos chances de erro, mesmo com o uso de calculadoras financeiras.**

**TAXAS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS**

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

**PASSAR UMA TAXA % ao mês PARA % ao ano: n > 1**

**5% a.m. → X % a.a.**

$$i_{eq} = (1+ 0{,}05)^{12} \therefore i_{eq} = 1{,}7959 \Rightarrow i_{eq} = 79{,}59\%\ \text{a.a.}$$

**Como a HP-12C não traz uma função direta para o cálculo de taxas equivalentes, pode-se utilizar o seguinte artifício com as suas próprias funções financeiras:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | CHS | PV | FV | 179,59 | |
| 5 | i | | 100 | - | 79,59 |
| 12 | n | | | | |

## TAXAS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

**PASSAR UMA TAXA % ao trim PARA % ao ano: n > 1**

**24% a.t. → Y % a.a.**

$$i_{eq} = (1+ 0,24)^4 \therefore i_{eq} = 2,3642 \Rightarrow i_{eq} = 136,42\% \text{ a.a.}$$

**Como a HP-12C não traz uma função direta para o cálculo de taxas equivalentes, pode-se utilizar o seguinte artifício com as suas próprias funções financeiras:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | CHS | PV | FV | 236,42 | |
| 24 | i | | 100 | - | 136,42 |
| 4 | n | | | | |

## TAXAS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

**PASSAR UMA TAXA % ao ano PARA % ao mês: n < 1**

**12% a.a. → X % a.m.**

$$i_{eq} = (1+ 0,12)^{\frac{1}{12}} \therefore i_{eq} = 1,0095 \Rightarrow i_{eq} = 0,95\% \text{ a.m.}$$

**Como a HP-12C não traz uma função direta para o cálculo de taxas equivalentes, pode-se utilizar o seguinte artifício com as suas próprias funções financeiras:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | CHS | PV | | FV | 100,95 | |
| 12 | i | | | 100 | - | 0,95 |
| 12 | 1/x | 0,0833 | n | | | |

## TAXAS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

**PASSAR UMA TAXA % ao ano PARA % ao trim: n < 1**

**120% a.a. → Y % a.t.**

$$i_{eq} = (1 + 1{,}20)^{\frac{1}{4}} \therefore i_{eq} = 1{,}2179 \Rightarrow i_{eq} = 21{,}79\%\ \text{a.t.}$$

**Como a HP-12C não traz uma função direta para o cálculo de taxas equivalentes, pode-se utilizar o seguinte artifício com as suas próprias funções financeiras:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | CHS | PV | | FV | 121,79 | |
| 120 | i | | | 100 | - | 21,79 |
| 4 | 1/x | 0,25 | n | | | |

**Taxas Equivalentes a Juros Compostos: Exemplo Ilustrativo**

**Calcule as taxas de juros mensal e anual equivalentes a 7,5% ao semestre.**

**<u>Taxa Mensal Equivalente</u>: 7,5% a.s. → X% a.m.**

**Fator $(1 + 0{,}075)^n$ → passar n para o mesmo período a taxa**

**quantidade de meses contidos num semestre = 6 → n = 1/6**

$$X = (1 + 0{,}075)^{1/6} = 1{,}0121 \rightarrow 1{,}21\%\ \text{a.m.}$$

**<u>Taxa Anual Equivalente</u>: 7,5% a.s. → Y% a.a.**

**Fator $(1 + 0{,}075)^n$ → passar n para o mesmo período a taxa**

**quantidade de semestres contidos num ano = 2 → n = 2**

$$Y = (1 + 0{,}075)^2 = 1{,}1556 \rightarrow 15{,}56\%\ \text{a.a.}$$

**Taxas Equivalentes a Juros Compostos: Exemplo Ilustrativo**

**Calcule as taxas de juros mensal e anual equivalentes a 7,5% ao semestre, utilizando a HP-12C.**

**<u>Taxa Mensal Equivalente</u>:**
**7,5% a.s. → X% a.m.**

f [FIN / x≷y / x≤y]
100 [CHS / DATE] [NPV / PV / $CF_0$]
7,5 [INT / i / 12÷]
6 [YTM / 1/x / $e^x$] 0,17 [AMORT / n / 12x]
[IRR / FV / $N_j$] 101,21
100 [–] 1,21

**<u>Taxa Anual Equivalente</u>:**
**7,5% a.s. → Y% a.a.**

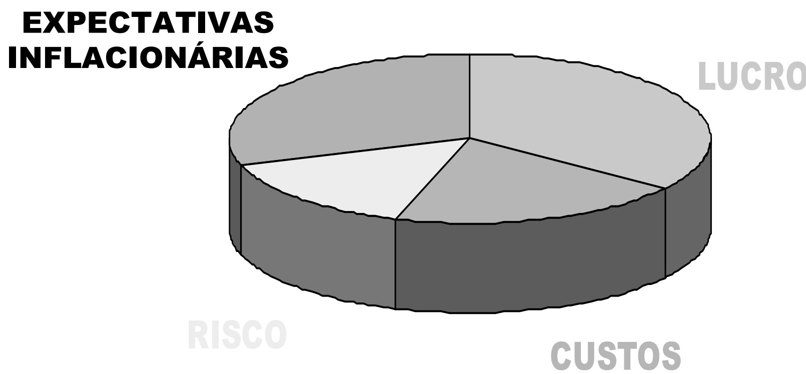
f [FIN / x≷y / x≤y]
100 [CHS / DATE] [NPV / PV / $CF_0$]
7,5 [INT / i / 12÷]
2 [AMORT / n / 12x]
[IRR / FV / $N_j$] 115,56
100 [–] 15,56

# TAXAS DE JUROS APARENTES

**(também chamadas de Taxas NOMINAIS)**

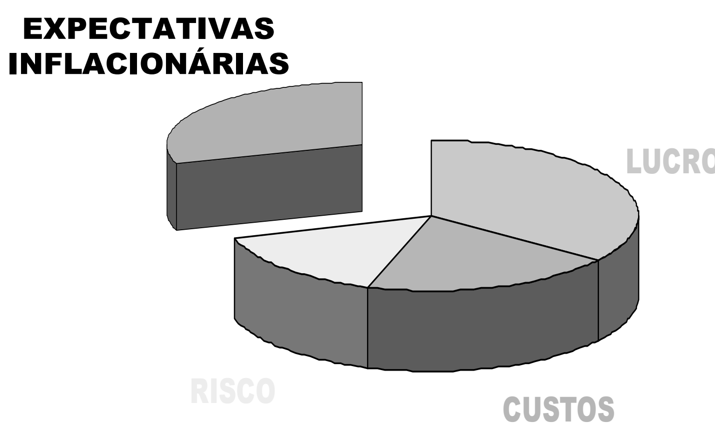
## COMPOSIÇÃO DAS TAXAS DE JUROS

**Taxa de Juros Pré-Fixada = Taxa Aparente**




**<u>Exemplos</u>:** **C.D.C. = 2,4% a.m.**
**EMPRÉSTIMOS PESSOAIS = 5% a.m.**
**SELIC = 12% a.a.**

## COMPOSIÇÃO DAS TAXAS DE JUROS




**<u>Exemplos</u>:** **POUPANÇA = 0,5% a.m. + TR**
**FINANCIAMENTOS = TJLP + x % a.a.**
**CASA PRÓPRIA = 12% a.a. + TR**
**LEASING = 2% a.m. + Correção Cambial**

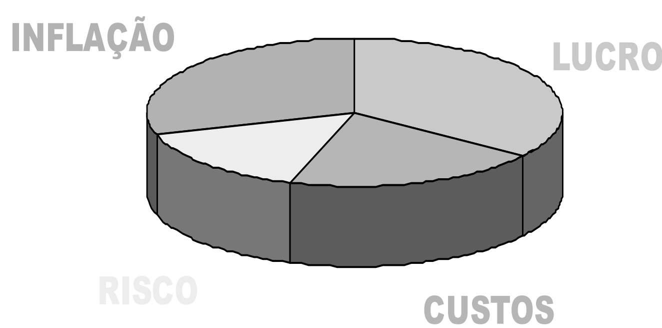
**NOTAS IMPORTANTES:**

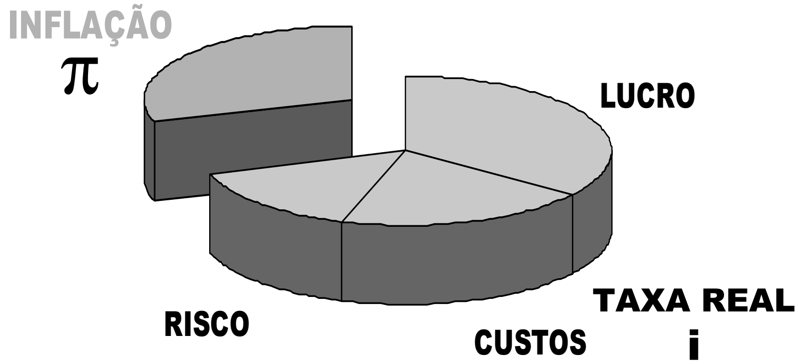
**Inflação e Correção Monetária são conceitos distintos.**

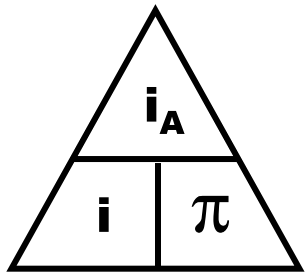
**Inflação é a alta sistemática e generalizada de preços numa economia e é medida por números-índices, método estatístico que considera as variações dos preços e das quantidades consumidas num determinado período, para um determinado conjunto de insumos, produtos e serviços, segundo uma determinada ponderação.**

**Correção Monetária, uma *invenção* brasileira, é uma taxa que tem o objetivo de tentar recompor o poder aquisitivo dos preços dos bens e serviços atingidos pela inflação, que pode ou não refletir integralmente as taxas de inflação.**

## TAXA APARENTE DE JUROS ($i_A$)

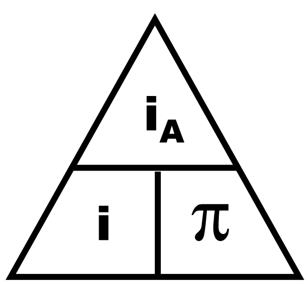





**TAXA APARENTE DE JUROS ($i_A$)**

**taxa de juros composta por uma taxa de juros real (i) e por outra de inflação ($\pi$)**

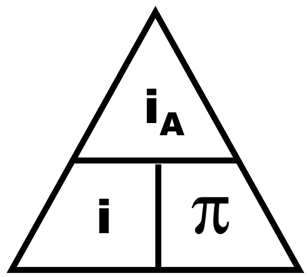


**Para acharmos $i_A$, multiplicamos i por $\pi$**

**Para acharmos i, dividimos $i_A$ por $\pi$**

**Para acharmos $\pi$, dividimos $i_A$ por i**

**Mesma linha = Multiplicação**
**Vertical = Divisão**




**<u>NOTAS IMPORTANTES</u>:**

**Lembre-se que, no regime de juros compostos, as operações aritméticas entre taxas de juros não podem ser realizadas na forma percentual.**

**Desta forma, deve-se entrar com as taxas em suas formas unitárias e somadas com a unidade, ou seja, com os seus respectivos fatores (1 + i).**
**Exemplo: 22% → 1,22**

**A utilização do Fator (1 + i) é genérica e mais fácil de ser aplicada**

**<u>NOTAS IMPORTANTES</u>:**

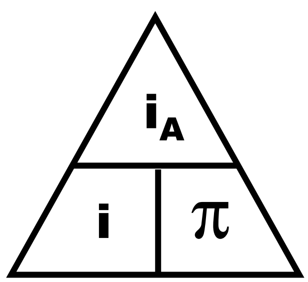
**Lembre-se que, no regime de juros compostos, as operações aritméticas entre taxas de juros não podem ser realizadas na forma percentual.**

**Desta forma, deve-se entrar com as taxas em suas formas unitárias e somadas com a unidade, ou seja, com os seus respectivos fatores (1 + i).**

**Exemplos:** 22% → 1 + 0,22 = 1,22

345% → 1 + 3,45 = 4,45

0,57% → 1 + 0,0057 = 1,0057




$i_A = 14{,}5\%$ a.a.

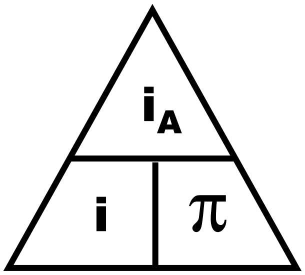
$\pi = 6{,}3\%$ a.a.

$$i = \frac{1 + 0{,}145}{1 + 0{,}063} = 1{,}0771$$

$$i = 1{,}0771 - 1 = 0{,}0771$$

$$i = 7{,}71\ \%\ \text{a.a.}$$

$i_A$ = 9,5% a.a. $\pi$ = 12,4% a.a.

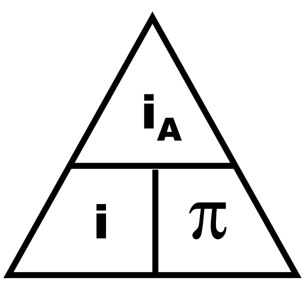



$$i = \frac{1 + 0{,}095}{1 + 0{,}124} = 0{,}9742$$

$$i = 0{,}9742 - 1 = -\,0{,}0258$$

$$i = -\,2{,}58\ \%\ \text{a.a.}$$

i = 0,5% a.m. $\pi$ = 0,42% a.m.



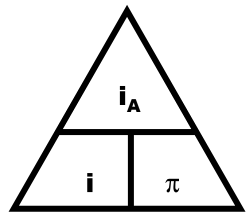

$$i_A = 1{,}005 \times 1{,}0042 = 1{,}00922$$

$$i_A = 1{,}00922 - 1 = 0{,}\ 00922$$

$$i_A = 0{,}922\ \%\ \text{a.m.}$$

### Taxas Equivalentes a Juros Compostos: Exemplo Ilustrativo

**Um investidor aplicou uma determinada quantia a prazo fixo, a uma taxa de juros de 5,48%. No momento do resgate, o investidor verificou que a inflação no período da aplicação foi de 1,95%. Determine a taxa real de juros conseguida na aplicação.**




**Taxa de Juros Aparente ($i_A$) = 5,48%**

**Taxa de Inflação ($\pi$) = 1,95%**

**Taxa Real de Juros (i) = (1+0,0548) / (1+0,0195) = 1,0346**

**i = 1,0346 – 1 = 0,0346 → 3,46%**

# INFLAÇÃO MEDIDA POR ÍNDICES

| MÊS/ANO | COLUNA Z |
|---|---|
| Ago/94 | 100,00 |
| Set/94 | 101,05 |
| Out/94 | 101,98 |
| Nov/94 | 102,27 |
| Dez/94 | 102,78 |

$$\pi = \frac{I_{atual}}{I_{inicial}} \quad \text{ou} \quad \pi = \frac{I_1}{I_0}$$

**Inflação Set - Dez**

$\pi = 102{,}78 / 101{,}05$

$\pi = 1{,}0171 \Rightarrow \pi = 1{,}71\%$

**REAJUSTE CONTRATUAL: tipo I**

- **Valor original do contrato: R$200.000;**
- **Data-base: março/2000;**
- **Reajuste econômico: anual;**
- **Índice pactuado: Coluna A**
- **Cotações do índice econômico:**

| | Coluna A |
|---|---|
| Março/2000 | 158,23 |
| Março/2001 | 176,52 |

- **Saldo contratual em março/2001: R$120.000.**

- **Calcular o reajuste anual**

## REAJUSTE CONTRATUAL: tipo I

- **Cálculo da variação do índice**:

  **Coluna A: $k_A$ = 176,52 / 158,23 = 1,1156 $\Rightarrow$ 11,56%**

- **Cálculo do reajuste**:

  **R = 0,1156 $\times$ R\$120.000 = R\$13.872**

- **Saldo contratual reajustado**:

  **S = R\$120.000 + R\$13.872 = R\$133.872**

  **ou S = (1 + 0,1156) $\times$ R\$120.000 = R\$133.872**

## REAJUSTE CONTRATUAL: tipo II

- **Valor original do contrato: R\$150.000;**
- **Data-base: março/2000;**
- **Reajuste econômico: anual;**
- **Índices pactuados:**
  **Coluna A (30%); Coluna B (50%); Coluna C (20%)**
- **Cotações dos índices econômicos:**

| | Coluna A | Coluna B | Coluna C |
|---|---|---|---|
| Março/2000 | 158,23 | 133,15 | 144,11 |
| Março/2001 | 176,52 | 145,27 | 158,81 |

- **Saldo contratual em março/2001: R\$60.000.**

- **Calcular o reajuste anual**

**REAJUSTE CONTRATUAL: tipo II**

- <u>Cálculo das variações dos índices</u>:

  Coluna A: $k_A$ = 176,52 / 158,23 = 1,1156 ⇒ 11,56%

  Coluna B: $k_B$ = 145,27 / 133,15 = 1,0910 ⇒ 9,10%

  Coluna C: $k_C$ = 158,81 / 144,11 = 1,1020 ⇒ 10,20%

- <u>Cálculo do reajuste ponderado</u>:

  R = 0,30×11,56% + 0,50×9,10% + 0,20×10,20% = 10,06%

  R = 0,1006 × R$60.000 = R$6.034,80

- <u>Saldo contratual reajustado</u>:

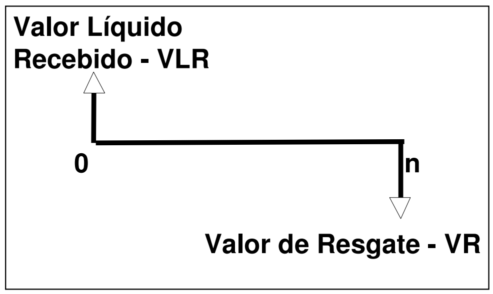
  S = R$60.000 + R$6.034,80 = R$66.034,80

  ou S = (1 + 0,1006) × R$60.000 = R$66.034,80

# DESCONTO BANCÁRIO

**Desconto Bancário: Exemplo Ilustrativo**

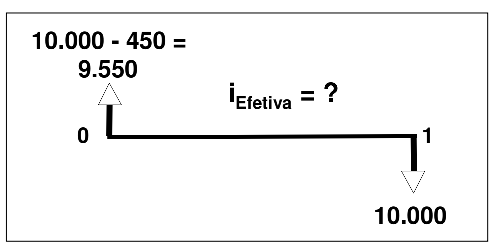
**Qual a taxa real de juros de uma operação de desconto de uma duplicata simples de R$ 10.000, com prazo de 30 dias, cuja taxa de desconto para este período é de 4,5 % a.m.**




**TAXA DE DESCONTO DA DUPLICATA = 4,5% a.m.**

**Desconto: $D = V \cdot i \cdot n \therefore D = 10.000 \cdot 0{,}045 \cdot 1 \therefore D = 450$**

**Cálculo do VLR: 10.000 - 450 = 9.550**




$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

$$10.000 = 9.550\,(1 + i_{EF})^1 \quad \therefore\ i_{EF} = 0{,}0471 \Rightarrow i_{EF} = 4{,}71\%\ \text{a.m.}$$

**Desconto Bancário: Exemplo Ilustrativo**

**Qual a taxa real de juros de uma operação de desconto de uma duplicata simples de R$ 10.000, com prazo de 30 dias, cuja taxa de desconto para este período é de 3,6 % ao mês. Considerar um IOF de 3% ao ano.**

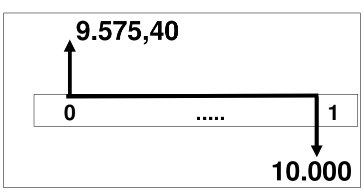
**Taxa de Desconto = 4% a.m.**

**IOF = 3% a.a. = 0,0082 % a.d.**

**IOF = 10.000 x 0,000082 x 30 = 24,60**

**Desconto = 10.000 x 0,04 x 1 = 400,00**

**Valor líquido= 10.000 – 24,60 - 400 = 9.575,40**

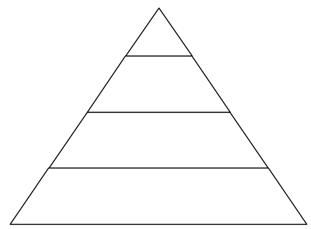



$$10.000 = 9.575,40\,(1 + i_{EF})^{1}$$

$$i_{EF} = 0,0443 \Rightarrow i_{EF} = 4,43\%\ \text{a.m.}$$

$$M = P \cdot (1 + i)^{n}$$

# SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS



## REGRAS DOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

**PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS**

**AMORTIZAÇÃO: Devolução total ou parcial do Principal**

**JUROS : Despesas Financeiras**

**JUROS INCIDEM SOBRE SALDO DEVEDOR**

**JUROS A CADA PERÍODO: J = P . i . n**

**Como n = 1 e P = Saldo Dev.** $\Rightarrow J_t = SD_{t-1} \cdot i$

**PRINCIPAIS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS:**

**PRICE**

**Sistema de amortização em que as prestações são iguais e sucessivas ao longo do tempo.**

**Exemplos: Crédito Direto ao Consumidor**
**Financiamento de automóveis**
**Sistema Financeiro da Habitação**

**SAC**

**Sistema de amortização em que as amortizações são constantes ao longo do tempo.**

**Exemplos: Empréstimos de longo prazo do BNDES, do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID) e do Banco Mundial**

**Sistemas de Amortização: Exemplo Ilustrativo**

**Elabore os esquemas de pagamento de um empréstimo de R$10.000, à taxa de 5% ao mês, para o prazo de 4 meses, para os sistemas de amortização PRICE e SAC.**

## SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO - TABELA PRICE

Taxa: 5 % a.m.

| Mês | Saldo Devedor | Amortização | Juros | Prestação |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 10.000,00 | | | |
| 1 | 7.679,88 | 2.320,12 | 500,00 | 2.820,12 |
| 2 | 5.243,76 | 2.436,12 | 383,93 | 2.820,12 |
| 3 | 2.685,83 | 2.557,93 | 262,19 | 2.820,12 |
| 4 | 0,00 | 2.685,83 | 134,29 | 2.820,12 |

$$R = P \cdot \left[ \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$R = 10.000 \cdot \left[ \frac{0{,}05 \cdot (1{,}05)^4}{(1{,}05)^4 - 1} \right] = 2.820{,}12$$

| HP-12C | | |
|---|---|---|
| 10.000 | PV | |
| 5 | i | |
| 4 | n | |
| | PMT | - 2.820,12 |

## SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE - SAC

Taxa: 5 % a.m.

| Mês | Saldo Devedor | Amortização | Juros | Prestação |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 10.000,00 | | | |
| 1 | 7.500,00 | 2.500,00 | 500,00 | 3.000,00 |
| 2 | 5.000,00 | 2.500,00 | 375,00 | 2.875,00 |
| 3 | 2.500,00 | 2.500,00 | 250,00 | 2.750,00 |
| 4 | 0,00 | 2.500,00 | 125,00 | 2.625,00 |

## CARÊNCIA EM EMPRÉSTIMOS

**Período inicial dos empréstimos em que não há pagamento do principal, ou seja, não há amortizações, mas poderá haver ou não pagamento de juros:**

**CARÊNCIA COM PAGAMENTO DE JUROS**
**o saldo devedor permanece constante durante a carência**

**CARÊNCIA SEM PAGAMENTO DE JUROS**
**os juros não pagos de cada período são incorporados ao saldo devedor anterior, passando a produzir juros para o próximo período**

**Empréstimo com Carência: Exemplo Ilustrativo**

**Elabore o esquema de pagamento de um empréstimo de R$100.000, à taxa de 15 % ao ano, pelo SAC, em 4 anos, com carência de 2 anos, com pagamento de juros.**

**SAC, em 4 anos e Carência de 2 anos, com pagamento de juros**

| MÊS | SALDO DEVEDOR | AMORTIZAÇÃO | JUROS | PARCELA |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | - | - | - |
| 1 | 100.000,00 | - | 15.000,00 | 15.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | - | 15.000,00 | 15.000,00 |
| 3 | 75.000,00 | 25.000,00 | 15.000,00 | 40.000,00 |
| 4 | 50.000,00 | 25.000,00 | 11.250,00 | 36.250,00 |
| 5 | 25.000,00 | 25.000,00 | 7.500,00 | 32.500,00 |
| 6 | 0,00 | 25.000,00 | 3.750,00 | 28.750,00 |

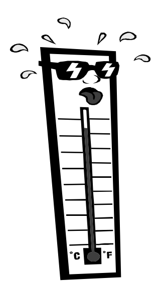
**Empréstimo com Carência: Exemplo Ilustrativo**

**Elabore o esquema de pagamento de um empréstimo de R$100.000, à taxa de 15 % ao ano, pelo SAC, em 4 anos, com carência de 2 anos, sem pagamento de juros.**

**SAC, em 4 anos e Carência de 2 anos, sem pagamento de juros**

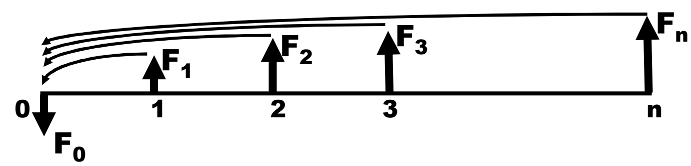
| MÊS | SALDO DEVEDOR | AMORTIZAÇÃO | JUROS | PARCELA |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | - | - | - |
| 1 | 115.000,00 | - | 15.000,00 | 0,00 |
| 2 | 132.250,00 | - | 17.250,00 | 0,00 |
| 3 | 99.187,50 | 33.062,50 | 19.837,50 | 52.900,00 |
| 4 | 66.125,00 | 33.062,50 | 14.878,13 | 47.940,63 |
| 5 | 33.062,50 | 33.062,50 | 9.918,75 | 42.981,25 |
| 6 | 0,00 | 33.062,50 | 4.959,38 | 38.021,88 |

# INDICADORES PARA ANÁLISE DE PROJETOS DE INVESTIMENTO



# VALOR PRESENTE LÍQUIDO

**O VPL é o valor no presente (t = 0) que equivale a um fluxo de caixa de um projeto, <u>calculado a uma determinada taxa de juros de desconto (k)</u>**




$$VPL = -F_0 + \frac{F_1}{(1+k)^1} + \frac{F_2}{(1+k)^2} + \frac{F_3}{(1+k)^3} + \dots + \frac{F_n}{(1+k)^n}$$

**Exemplo de Fluxo de Caixa**

| | Ano 0 | Ano 1 | Ano 2 | Ano 3 | Ano 4 | Ano 5 | Ano 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Receitas Operacionais | | 350.000 | 367.500 | 385.875 | 405.169 | 425.427 | 446.699 |
| (-) Impostos e Taxas | | -17.500 | -18.375 | -19.294 | -20.258 | -21.271 | -22.335 |
| (-) Custos | | -122.500 | -128.625 | -135.056 | -141.809 | -148.900 | -156.344 |
| (-) Depreciação | | -70.000 | -70.000 | -70.000 | -70.000 | -70.000 | 0 |
| (=) LAJIR | | 140.000 | 150.500 | 161.525 | 173.101 | 185.256 | 268.019 |
| (-) Juros | | -45.000 | -45.000 | -45.000 | -33.750 | -22.500 | -11.250 |
| (=) LAIR | | 95.000 | 105.500 | 116.525 | 139.351 | 162.756 | 256.769 |
| (+/-) Imposto de Renda | | -28.500 | -31.650 | -34.958 | -41.805 | -48.827 | -77.031 |
| (=) Lucro Líquido | | 66.500 | 73.850 | 81.568 | 97.546 | 113.929 | 179.738 |
| (+) Depreciação | | 70.000 | 70.000 | 70.000 | 70.000 | 70.000 | 0 |
| (+) Valor Residual | | | | | | | 70.000 |
| (-) Amortização | | 0 | 0 | -75.000 | -75.000 | -75.000 | -75.000 |
| (+) Empréstimo | 300.000 | | | | | | |
| (-) Investimentos | -500.000 | | | | | | |
| (=) Fluxo de Caixa | -200.000 | 136.500 | 143.850 | 76.568 | 92.546 | 108.929 | 174.738 |

**TMA = 20% a.a.**

**VPL = - 200.000 + 136.500/(1,20)$^1$ + 143.850/(1,20)$^2$ + 76.568/(1,20)$^3$ + + 92.546/(1,20)$^4$ + 108.929/(1,20)$^5$ + 174.738/(1,20)$^6$ = 204.882**

**A taxa de juros de desconto k utilizada para o cálculo do VPL é denominada de <u>Taxa Mínima de Atratividade</u> <u>TMA</u>**

# VALOR PRESENTE LÍQUIDO

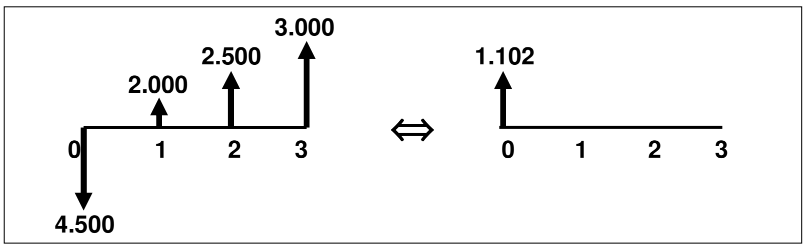
**O Valor Presente Líquido - VPL (tradução literal de *Net Present Value - NPV*), considerado como um critério rigoroso e isento de falhas técnicas, de maneira geral, <u>é o melhor procedimento</u> para seleção de projetos diferentes, <u>com o mesmo horizonte de tempo</u>**

# VALOR PRESENTE LÍQUIDO

| Ano | Fluxo de Caixa Líquido |
| --- | --- |
| 0 | -4.500 |
| 1 | 2.000 |
| 2 | 2.500 |
| 3 | 3.000 |

**TMA = 15% a.a.**

$$VPL = -4.500 + \frac{2.000}{(1,15)^1} + \frac{2.500}{(1,15)^2} + \frac{3.000}{(1,15)^3} = 1.102$$

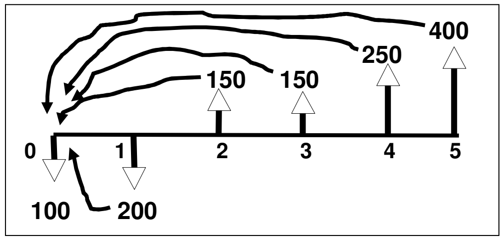



**Valor Presente Líquido (VPL): Exemplo Ilustrativo**

**Determine o VPL do projeto de investimento representado pelo fluxo de caixa abaixo, a partir de uma taxa de 12 % a.a.**

| ANO | FLUXO DE CAIXA |
| --- | --- |
| 0 | - 100.000 |
| 1 | - 200.000 |
| 2 | 150.000 |
| 3 | 150.000 |
| 4 | 250.000 |
| 5 | 400.000 |

**Solução**




VPL = - 100.000 - 200.000 / $(1,12)^1$ + 150.000 / $(1,12)^2$ +
+ 150.000 / $(1,12)^3$ + 250.000 / $(1,12)^4$ +
+ 400.000 / $(1,12)^5$

VPL = 333.624,95 > 0 ⇒ PROJETO VIÁVEL

# FLUXOS DE CAIXA NA HP-12C

# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

**Nº de Períodos n**

**Taxa de Juros i em %**

**Valor do Fluxo de Caixa em t = 0 $CF_0$**

**Valores dos Fluxos de Caixa em t = 1, 2, ... , n $CF_j$**

**Nº de Repetições Seguidas de cada $CF_j$**


# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

**NPV = VPL**
***Net Presente Value***
**Valor Presente Líquido**

**Solução**

f [REG] CLx

100.000 CHS g [CF0] PV

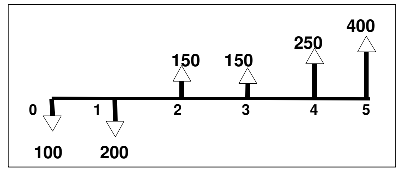
200.000 CHS g [CFj] PMT

150.000 g [CFj] PMT

2 g [Nj] FV

250.000 g [CFj] PMT

400.000 g [CFj] PMT




12 i

f [NPV] PV 333.624,95

VPL > 0 ⇒ PROJETO VIÁVEL

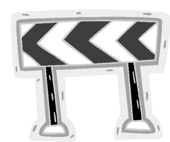
# TAXA INTERNA DE RETORNO

- **A Taxa Interna de Retorno - TIR (tradução literal de *Internal Rate of Return - IRR*) <u>é a taxa que torna nulo o VPL</u>**

**TIR > k → PROJETO VIÁVEL**

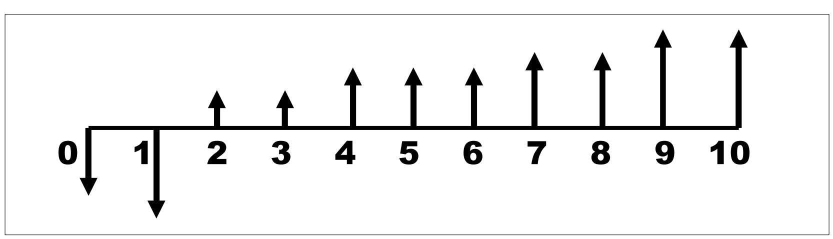
# TAXA INTERNA DE RETORNO

- **Trata-se de um indicador de larga aceitação e um dos mais utilizados como parâmetro de decisão, <u>mas existem restrições para o seu uso</u>**

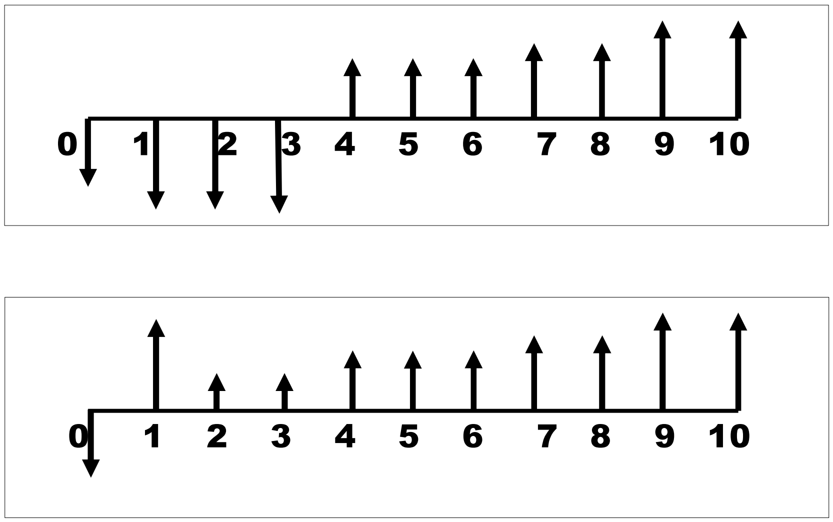


# TAXA INTERNA DE RETORNO

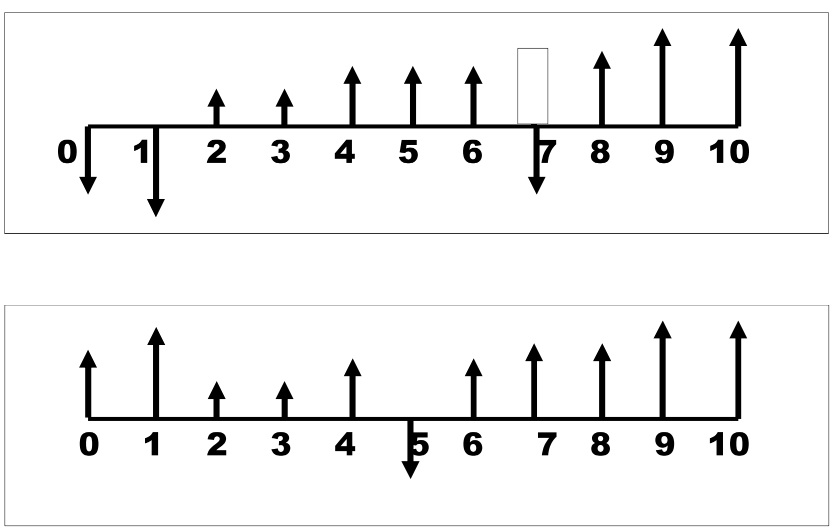
**A TIR deve ser utilizada em <u>projetos com fluxos de caixa convencionais</u>**



## Fluxos de Caixa Convencionais




## Fluxos de Caixa NÃO Convencionais

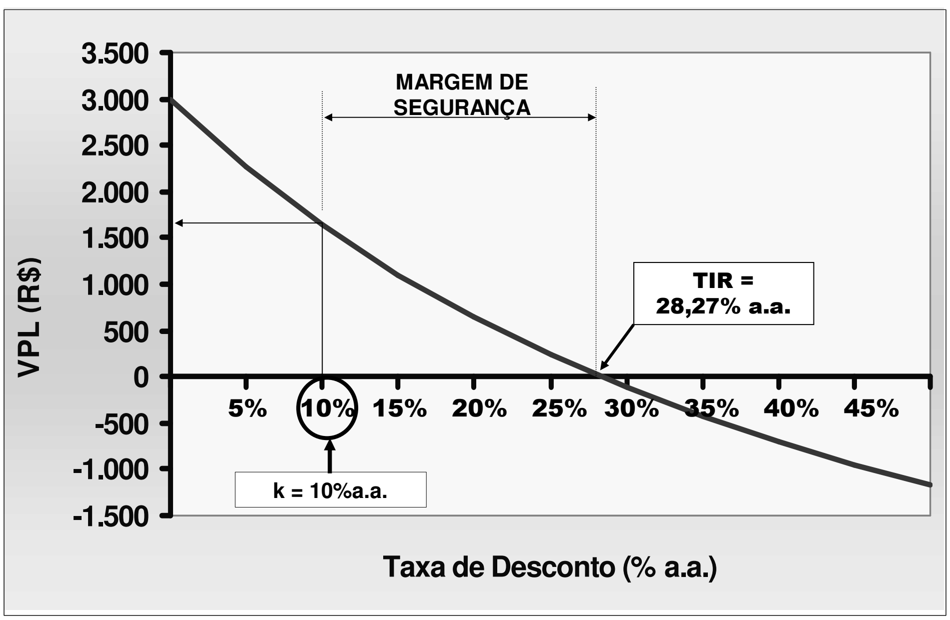


# TAXA INTERNA DE RETORNO

| Ano | Fluxo |
|---|---|
| 0 | -4.500 |
| 1 | 2.000 |
| 2 | 2.500 |
| 3 | 3.000 |

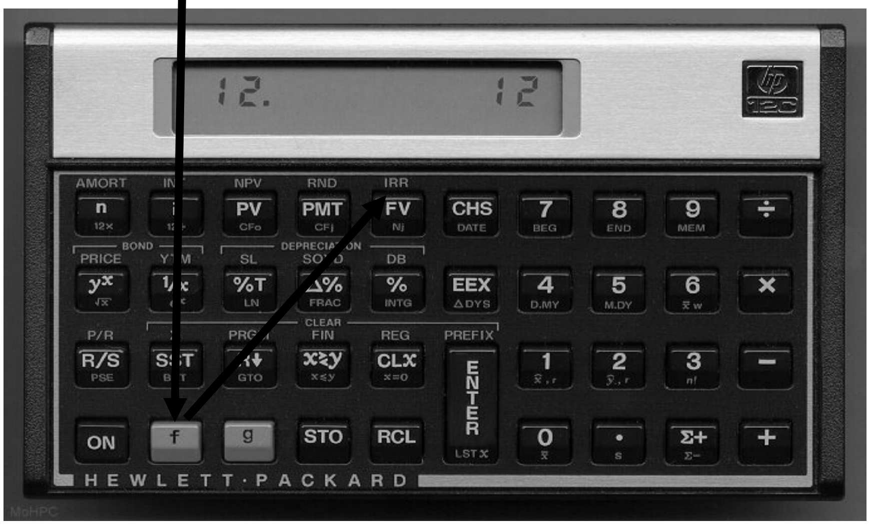
| Taxa | VPL |
|---|---|
| 0% | 3.000 |
| 5% | 2.264 |
| 10% | 1.638 |
| 15% | 1.102 |
| 20% | 639 |
| 25% | 236 |
| 30% | -117 |
| 35% | -427 |
| 40% | -703 |
| 45% | -948 |
| 50% | -1.167 |

# TAXA INTERNA DE RETORNO



# FUNÇÕES FINANCEIRAS DA HP-12C

**IRR = TIR**
***Internal Rate of Return***
**Taxa Interna de Retorno**

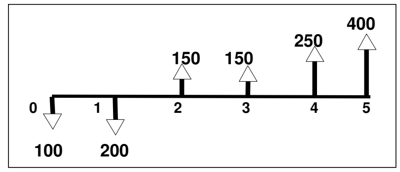



**Taxa Interna de Retorno (TIR): Exemplo Ilustrativo**

**Determine o VPL do projeto de investimento representado pelo fluxo de caixa abaixo, a partir de uma taxa de 12 % a.a.**

| ANO | FLUXO DE CAIXA |
|---|---|
| 0 | - 100.000 |
| 1 | - 200.000 |
| 2 | 150.000 |
| 3 | 150.000 |
| 4 | 250.000 |
| 5 | 400.000 |

**Solução**




f | REG CLx x=0

100.000 | CHS DATE | g | NPV PV $CF_0$

200.000 | CHS DATE | g | RND PMT $CF_j$

150.000 | g | RND PMT $CF_j$

2 | g | IRR FV $N_j$

250.000 | g | RND PMT $CF_j$

400.000 | g | RND PMT $CF_j$

12 | INT i 12÷

f | NPV PV $CF_0$ | 333.624,95

f | IRR FV $N_j$ | 45,33

VPL > 0 ⇒ PROJETO

TIR > TMA VIÁVEL

### Taxa Interna de Retorno (TIR): Exemplo Ilustrativo

**Determine os VPL e as TIR dos projetos de investimento representado pelos fluxos de caixa abaixo, para uma taxa k de 20 % a.a., e escolha o melhor projeto.**

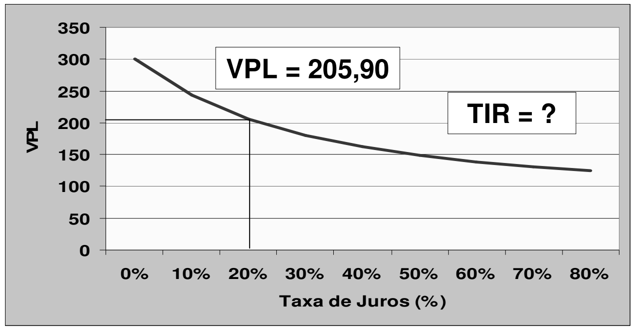
| Projeto A | |
|---|---|
| **Ano** | **FC** |
| 0 | 100 |
| 1 | -50 |
| 2 | 150 |
| 3 | -50 |
| 4 | 150 |

| Projeto B | |
|---|---|
| **Ano** | **FC** |
| 0 | -50 |
| 1 | -50 |
| 2 | 100 |
| 3 | 150 |
| 4 | 150 |

Solução

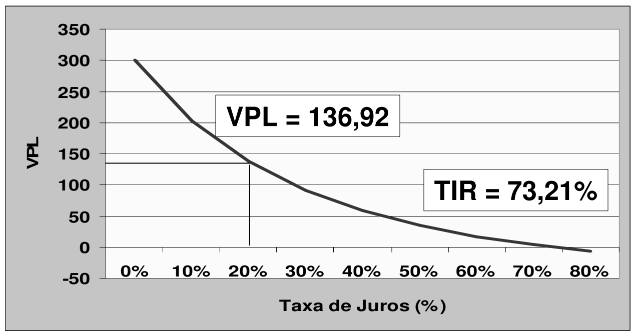
**FLUXO DE CAIXA NÃO CONVENCIONAL**

| Projeto A | |
|---|---|
| Ano | FC |
| 0 | 100 |
| 1 | -50 |
| 2 | 150 |
| 3 | -50 |
| 4 | 150 |




**FLUXO DE CAIXA CONVENCIONAL**

| Projeto B | |
|---|---|
| Ano | FC |
| 0 | -50 |
| 1 | -50 |
| 2 | 100 |
| 3 | 150 |
| 4 | 150 |




**Taxa Interna de Retorno (TIR): Exemplo Ilustrativo**

**Determine os VPL e as TIR dos projetos de investimento representado pelos fluxos de caixa abaixo, para uma taxa k de 30 % a.a., e escolha o melhor projeto.**

| Projeto A | |
|---|---|
| Ano | FC |
| 0 | 100 |
| 1 | 100 |
| 2 | 100 |
| 3 | 100 |
| 4 | 100 |
| 5 | -600 |
| 6 | 100 |
| 7 | 100 |
| 8 | 100 |
| 9 | 100 |
| 10 | -750 |
| 11 | 100 |
| 12 | 100 |
| 13 | 100 |
| 14 | 100 |
| 15 | 100 |

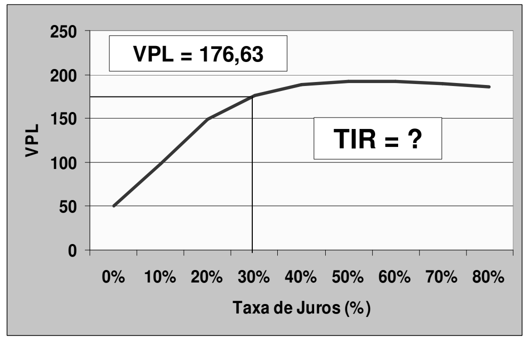
| Projeto B | |
|---|---|
| Ano | FC |
| 0 | 100 |
| 1 | 100 |
| 2 | 100 |
| 3 | 100 |
| 4 | 100 |
| 5 | -1350 |
| 6 | 100 |
| 7 | 100 |
| 8 | 100 |
| 9 | 100 |
| 10 | 100 |
| 11 | 100 |
| 12 | 100 |
| 13 | 100 |
| 14 | 100 |
| 15 | 100 |

**Solução**

FLUXOS DE CAIXA NÃO CONVENCIONAIS

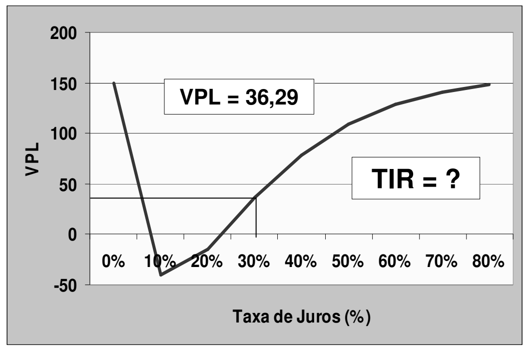
**Projeto A**

| Ano | FC |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 100 |
| 2 | 100 |
| 3 | 100 |
| 4 | 100 |
| 5 | -600 |
| 6 | 100 |
| 7 | 100 |
| 8 | 100 |
| 9 | 100 |
| 10 | -750 |
| 11 | 100 |
| 12 | 100 |
| 13 | 100 |
| 14 | 100 |
| 15 | 100 |




**Projeto B**

| Ano | FC |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 100 |
| 2 | 100 |
| 3 | 100 |
| 4 | 100 |
| 5 | -1350 |
| 6 | 100 |
| 7 | 100 |
| 8 | 100 |
| 9 | 100 |
| 10 | 100 |
| 11 | 100 |
| 12 | 100 |
| 13 | 100 |
| 14 | 100 |
| 15 | 100 |




## TIR: Exemplo Ilustrativo

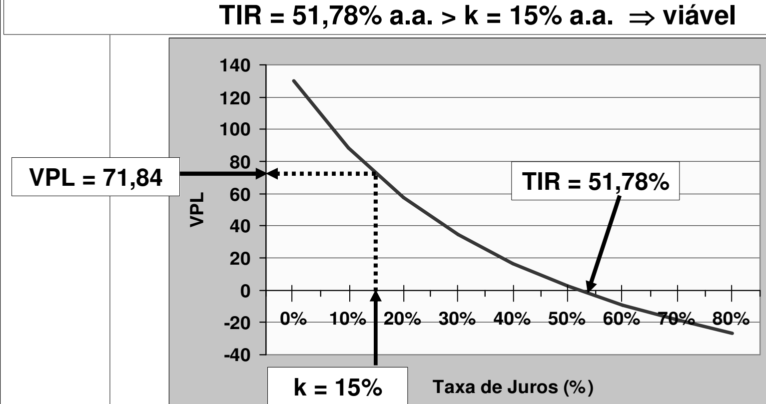
**Um projeto tem o seguinte FC previsto, em US$.$10^3$.**
**Estude os conceitos de VPL e TIR para uma TMA de 15% ao ano.**

| $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| -100 | +60 | +80 | +90 |

**Solução**

**VPL (15% a.a.) = 71,84 > 0 $\Rightarrow$ viável**

**TIR = 51,78% a.a. > k = 15% a.a. $\Rightarrow$ viável**



# FIM

**Marcus Quintella, D.Sc.**

**E-mail: marcus.quintella@fgv.br**

**Internet: www.marcusquintella.com.br**